Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Locală -2015 Maramureş

Clasa a XII-a varianta II

1.a) Calculaţi $\int \frac{sinx+cosx}{e^x+acosx}dx,\ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ a > 0$.

b)Dacă $f:[0,1] \rightarrow R$ este o funcţie continuă şi $n \in N, n \geq 2$, arătaţi că

$$2\int_0^1 f(x)dx - n\int_0^1 f^2(x^n)dx \leq \frac{n}{2n-1}.$$

2 . Fie funcţia $f:(0,\infty) \rightarrow R, f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right) ln\frac{x^4+2x^3-2x+1}{x^2}$.

Să se determine primitiva F a funcţiei, ştiind că $F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2ln5 + \frac{\pi}{2}$.

3. Fie G un grup cu n elemente şi p cel mai mic divizor prim al lui n. Să se arate că grupul G este abelian dacă şi numai dacă pentru orice $a, b \in G$ există $k \in \{1,2,\dots,p-1\}$, astfel încât $ab = b^k a$.

G.M.6-7-8/2014

4. Fie $(G,\cdot)$ un grup şi mulţimea $H_n = \{x \in G / x^n = e\}, n \in N$.

a) Să se arate că H_2 este subgrup al lui G dacă şi numai dacă $xy = yx, \forall\ x, y \in H_2$.

b) Dacă p este un număr prim cu proprietatea că H_p are cel mult p elemente atunci $H_n = \{e\}$ sau H_p este un subgrup al lui G izomorf cu $(Z_p, +)$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Subiecte selectate şi prelucrate de:

. prof. Pop Vesel Floare, Lic. Bogdan Vodă, Vişeu de Sus
prof. Gherasin Gheorghe, Lic. Regele Ferdinand, Sighetu-M.
prof. Giurgi Vasile, C.N. Dragoş Vodă, Sighetu-M.

1. a) Calculaţi $\int \frac{sinx+cosx}{e^x+acosx}dx,\ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ a > 0$.

b) Dacă $f:[0,1] \to R$ este o funcţie continuă şi $n \in N, n \geq 2$, arătaţi că

$$2\int_0^1 f(x)dx - n\int_0^1 f^2(x^n)dx \leq \frac{n}{2n-1}.$$

Barem de corectare

a) Avem $I = \int \frac{\frac{1}{a}(e^x+acosx)-\frac{1}{a}(e^x-asinx)}{e^x+acosx}dx = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}ln(e^x + acosx) + C, C \in R$...3p

b) In $\int_0^1 f(x)dx$ facem schimbarea de variabilă $x = t^n$....1p. Inegalitatea din enunţ devine

$\int_0^1 [x^{n-1} - f(x^n)]^2 dx \geq 0$....2p. Finalizare..1p

2.Fie funcţia $f:(0,\infty) \to R, f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)ln\frac{x^4+2x^3-2x+1}{x^2}$.

Să se determine primitiva F a funcţiei, ştiind că $F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 2ln5 + \frac{\pi}{2}$.

Barem de corectare:

$f(x) = \left(x-\frac{1}{x}\right)' \ln\left(x^2+2x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$....3p. Cu schimbarea de variabilă $t = x - \frac{1}{x}$ avem

$G(t) = \int ln(t^2 + 2t + 2)dt$.........2p. Integrând, prin părţi, obţinem

$G(t) = t\,ln(t^2 + 2t + 2) - 2t + ln(t^2 + t + 2) + 2arctg(t + 1) + c, c \in R$.

Astfel rezultă

$F(x) = \frac{x^2+x-1}{x}ln\frac{x^4+2x^3-2x+1}{x^2} - \frac{2(x^2-1)}{x} + 2arctg\frac{x^2-1}{x} + 2$....3p

3.Fie G un grup cu n elemente şi p cel mai mic divizor prim al lui n. Să se arate că grupul G este abelian dacă şi numai dacă pentru orice $a, b \in G$ există $k \in \{1,2,\dots,p-1\}$, astfel încât $ab = b^k a$.

G.M.6-7-8/2014

Barem de corectare:

Dacă G este abelian, atunci $ab = ba, \forall\, a, b \in G$, evident $k = 1$.....1p. Dacă n par atunci

$p = 2 \Longrightarrow k = 1 \Longrightarrow ab = ba, \forall\, a, b \in G$.....1p.

Dacă n impar atunci avem cazurile

i) p este număr prim impar

Pentru a = e $\Longrightarrow$ (1) $b = b^k, 1 \leq k \leq p-1$....1p

Fie $c \in G, ord(c) = p \Longrightarrow c^p = e$. In locuind In (1) obţinem $ord(c) = p - k$, contradicţie cu minimalitatea lui p. Deci $k = 1 \Longrightarrow ab = ba, \forall\, a, b \in G$......1p

ii) n este număr prim, atunci $x^n = e, \forall\, x \in G$....1p. Din $ab = b^k a$, pentru a = e $\Longrightarrow$ $b = b^k$, de unde $ord(b) \leq k - 1 < n$, contradicţie.....2p

4.Fie $(G,\cdot)$ un grup şi mulţimea $H_n = \{x \in G / x^n = e\}, n \in N$.

a)Să se arate că H_2 este subgrup al lui G dacă şi numai dacă $xy = yx, \forall\, x, y \in H_2$.

b)Dacă p este un număr prim cu proprietatea că H_p are cel mult p elemente atunci $H_n = \{e\}$ sau H_p este un subgrup al lui G izomorf cu $(Z_p, +)$.

Barem de corectare: a)

H_2 este subgrup al lui G, iar $x^2 = e, \forall\, x, y \in H_2 \Longrightarrow H_2$ este abelian.....1p

Dacă $x, y \in H_2 \Longrightarrow (xy)^2 = xyxy = x^2y^2 = e \Longrightarrow xy \in H_2$....1p

Dacă $x \in H_2 \Longrightarrow x^2 = e \Longrightarrow x^{-1} = x \in H_2$. Deci H_2 este subgrup.....1p

b)Dacă $H_p \neq \{e\}$, fie $x \in H_p - \{e\} \Longrightarrow x^p = e \Longrightarrow ord(x) = p$ (p este prim)...1p. De aici $\{e, x, x^2, \dots, x^{p-1}\} \subset H_p \Longrightarrow |H_p| \geq p$, ...1p, dar din enunţ H_p are cel mult p elemente, deci $\{e, x, x^2, \dots, x^{p-1}\} = H_p$...1p. Finalizare 1p